Language: **Montenegrian**

Nedjelja, 23. juni 2013. godine

Zadatak 1. Naći sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva za koje su oba broja $\frac{a^3b-1}{a+1}$ i $\frac{b^3a+1}{b-1}$ prirodni brojevi.

Zadatak 2. Neka je ABC oštrougli trougao u kome je $|AB| < |AC|$ i neka je O središte njemu opisane kružnice ω. Neka je D tačka na duži BC takva da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$. Neka je E druga presječna tačka kružnice ω i prave AD. Ako su tačke M, N i P redom središta duži BE, OD i AC, dokazati da su M, N i P kolinearne tačke.

Zadatak 3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje važi $ab \geq 1$. Dokazati da je

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

Zadatak 4. Neka je n prirodan broj. Dva igrača, Alisa i Bob, igraju sljedeću igru:

- Alisa bira n realnih brojeva, među kojima može biti i jednakih;
- Alisa sabira svaka dva od n izabranih brojeva, te zbirove piše na papiru i papir predaje Bobu (napisanih zbirova ima ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ i među njima može biti i jednakih);
- Bob pobjeđuje ako u prvom pokušaju pronađe svih početnih n brojeva koje je Alisa izabrala.

Može li Bob uvijek biti siguran da će pobijediti u sljedećim slučajevima?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Obrazloži svoj(e) odgovor(e).

[Na primjer, za $n = 4$, Alisa može izabrati brojeve 1, 5, 7, 9. Kada sabere svaka dva od tih brojeva, dobiće iste zbirove kao i kada bi sabirala svaka dva od brojeva 2, 4, 6, 10, pa stoga Bob ne može biti siguran u pobjedu u ovom slučaju.]

Vrijeme za izradu: 4 *sata i* 30 *minuta*

Svaki zadatak vrijedi 10 *poena*