Language: **Turkish**

---

23 Haziran 2013, Pazar

Problem 1. $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ ve $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ sayılarının pozitif tam sayı olmasını sağlayan tüm (a,b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Problem 2. $|AB| < |AC|$ olmak üzere ABC dar açılı üçgeninin ω çevrel çemberinin merkezi O olsun. $[BC]$ kenarı üzerinde $s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{CAO})$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. AD doğrusu ω çemberini ikinci kez E noktasında kesiyor. M, N ve P sırasıyla, $[BE]$, $[OD]$ ve $[AC]$ doğru parçalarının orta noktaları ise, M, N ve P noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

Problem 3. $ab \geq 1$ koşulunu sağlayan tüm a ve b pozitif gerçel sayıları için

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 4. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, Ayşe ve Burak aşağıda tanımlanan oyunu oynuyorlar:

- Ayşe, birbirinden farklı olması gerekmeyen n tane gerçel sayı seçiyor
- Ayşe, seçtiği sayıların tüm ikili toplamlarını bir kağıt üzerine yazıp Burak'a veriyor (Kağıtta $\frac{n(n-1)}{2}$ tane birbirinden farklı olması gerekmeyen sayı yazılıdır)
- Burak, Ayşe'nin oyunun başında seçtiği n tane sayıyı doğru olarak belirlerse oyunu kazanıyor

Burak aşağıdaki durumlarda oyunu kesinlikle kazanacağından emin olabilir mi?

a. $n=5$ **b.** $n=6$ **c.** $n=8$

Cevaplarınızı açıklayınız.

[Örneğin $n=4$ durumunda Ayşe $1,5,7,9$ sayılarını seçerse, $2,4,6,10$ sayıları da aynı ikili toplamları vereceği için, Burak oyunu kesinlikle kazanacağından emin olamaz.]

Süre: 4 saat 30 dakika.
Her problem 10 puan değerindedir.