Language: **Serbian**

Недеља, 23. јун 2013.

Проблем 1. Одреди све уређене парове природних бројева (a, b) за које су вредности оба разломка $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ такође природни бројеви.

Проблем 2. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $AB < AC$ и O центар описане кружнице k троугла ABC. Нека је D тачка на страници BC, таква да је $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO$ и E тачка пресека кружнице k и праве AD, различита од A. Ако су тачке M, N и P, редом, средишта дужи BE, OD и AC, докажи да су тачке M, N и P колинеарне.

Проблем 3. Нека су a и b позитивни реални бројеви за које важи $a \cdot b \geq 1$. Докажи да је

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

Проблем 4. Нека је n природан број. Два играча, Ана и Бане, играју следећу игру:

- Ана бира n реалних бројева (међу њима може бити и једнаких);
- Ана сабира свака два од n изабраних бројева, збирове пише на папир и папир даје Банету (написаних збирова има укупно $\frac{n(n-1)}{2}$ и међу њима може бити и једнаких);
- Бане побеђује ако тачно у првом покушају каже којих n бројева је Ана изабрала.

Да ли Бане може сигурно да победи у следећим случајевима:
а) $n = 5$, **б**) $n = 6$, **в**) $n = 8$.
Образложи одговоре.

[На пример, за $n = 4$, Ана може да изабере бројеве 1, 5, 7, 9. Када сабере свака два од њих, добиће исте збирове као и када би на исти начин сабирала и бројеве 2, 4, 6, 10, па према томе Бане не може сигурно да победи у овом случају.]

Време за израду: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем се бодује са 10 поена