Language: **Serbian (BiH)**

Недјеља, 23. јуни 2013. године

Задатак 1. Наћи све уређене парове (a,b) позитивних цијелих бројева, за које су оба броја $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ позитивни цијели бројеви.

Задатак 2. Нека је ABC оштроугли троугао код којег је $AB < AC$ и нека је O центар њему описане кружнице ω. Нека је D тачка на дужи BC таква да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$. Нека је E друга пресјечна тачка кружнице ω и праве AD. Ако су M, N и P редом средишта дужи BE, OD и AC, доказати да су тачке M, N и P колинеарне.

Задатак 3. Доказати да је

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

за све позитивне реалне бројеве a и b за које вриједи $ab \geq 1$.

Задатак 4. Нека је n позитиван цијели број. Два играча, Супермен и Бетмен, играју сљедећу игру:

- Супермен бира n реалних бројева, који не морају сви бити различити.
- Супермен Бетмену предаје папир на коме је исписао збирове сваког од могућих парова. (постоји $\frac{n(n-1)}{2}$ таквих збирова, који не морају бити различити)
- Бетмен побјеђује ако тачно, у првом покушају, пронађе свих почетних n бројева које је Супермен изабрао.

Може ли Бетмен увијек бити сигуран да ће побиједити у сљедећим случајевима?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Образложи свој(е) одговор(е).

[На примјер, за $n = 4$, Супермен може изабрати бројеве 1, 5, 7, 9, чије су суме по паровима исте као и код бројева 2, 4, 6, 10 и ту Bob не може бити сигуран у побједу.]

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вриједи 10 бодова