Language: **Russian**

Воскресенье, 23 июня 2013год.

Задача 1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых числа $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ оба являются натуральными.

Задача 2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$ и пусть O - центр описанной окружности ω, треугольника ABC. D- точка на стороне BC такая, что $\angle BAD = \angle CAO$. Прямая AD вторично пересекает окружность ω в точке E. Пусть M, N, P – середины отрезков BE, OD и AC соответственно. Докажите, что точки M, N и P- лежат на одной прямой.

Задача 3. Докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

для всех положительных действительных a и b таких, что $ab \geq 1$.

Задача 4. Дано натуральное число n. Два игрока Алиса и Боб играют в следующую игру:

- Алиса загадывает n произвольных чисел, не обязательно различных
- Алиса записывает все по парные суммы загаданных чисел на лист бумаги и отдает этот лист Бобу (на листе бумаги будет записано $\frac{n(n-1)}{2}$ таких сумм, необязательно различных)
- Боб выигрывает, если он правильно может определить в точности те числа, которые загадала Алиса.

Может ли Боб быть уверен, что выиграет для следующих случаях?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Обоснуйте свой ответ.

[Например, если $n = 4$, Алиса может загадать числа 1, 5, 7, 9, которые дают такие же по парные суммы как и числа 2, 4, 6, 10, и в этом случаю Боб не может выиграть.]

Время: 4 часа 30 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов