Language: **Romanian**

Duminică, 23 iunie, 2013

Problema 1. Determinați toate perechile ordonate de numere naturale nenule $(a;b)$ pentru care numerele $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ şi $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ sunt simultan numere naturale nenule.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB<AC$ şi O centrul cercului său circumscris ω. Fie D un punct pe segmentul $[BC]$ astfel încât $\widehat{BAD}\equiv\widehat{CAO}$. Fie E al doilea punct de intersecție a cercului ω cu dreapta AD. Dacă M, N şi P sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, $[OD]$ şi respectiv $[AC]$, demonstrați că punctele M, N şi P sunt coliniare.

Problema 3. Arătați că $\left(a+2b+\dfrac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\dfrac{2}{b+1}\right)\geq 16$,
pentru oricare numere reale pozitive a şi b cu proprietatea $ab\geq 1$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Doi jucători Alina şi Bogdan joacă următorul joc:
- Alina alege n numere reale, nu neapărat distincte.
- Alina scrie pe o foaie de hârtie toate sumele obținute adunând câte două dintre cele n numere şi-i înmânează foaia lui Bogdan.

(Există $\dfrac{n(n-1)}{2}$ astfel de sume, nu neapărat distincte.)
- Bogdan câştigă dacă determină corect, dintr-o singură încercare, toate cele n numere alese inițial de Alina.

Poate fi Bogdan sigur că va câştiga în următoarele cazuri?

a. $n=5$ **b.** $n=6$ **c.** $n=8$.

Justificați răspunsurile.

[De exemplu, când $n=4$, Alina poate alege numerele 1, 5, 7 şi 9 care au aceleaşi sume pe perechi ca şi numerele 2, 4, 6 şi 10, prin urmare, Bogdan nu poate fi sigur că va câştiga jocul.]

Fiecare problemă valorează 10 puncte.
Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute.