Language: **Macedonian**

Недела, 23 јуни 2013 година

Проблем 1. Одреди ги сите подредени парови природни броеви $(a,\ b)$ за кои што вредностите на двете дропки $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се природни броеви.

Проблем 2. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој што $\overline{AB} < \overline{AC}$ и O е центар на опишаната кружница k на триаголникот ABC. Нека D е точка на страната BC, таква што $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO$ и E е пресечна точка на кружницата k и правата AD, различна од A. Ако точките M, N и P, се средини на отсечките BE, OD и AC, соодветно, докажи дека точките M, N и P се колинеарни.

Проблем 3. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои што важи $a \cdot b \geq 1$. Докажи дека

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

Проблем 4. Нека n е природен број. Два играчи, Ана и Бојан, ја играат следната игра:

- Ана бира n реални броеви (меѓу нив може да има и исти броеви);

- Ана ги собира секои два од n-те избрани броеви, збировите ги пишува на лист и листот го дава на Бојан (има вкупно $\frac{n(n-1)}{2}$ напишани збирови и меѓу нив може да има и исти);

- Бојан победува ако точно во првиот обид каже кои n броеви ги избрала Ана.

Дали Бојан може сигурно да победи во следниве случаи:

а) $n = 5$, **б**) $n = 6$, **в**) $n = 8$.

Одговорите образложи ги.

[На пример, за $n = 4$, Ана може да ги избере броевите 1, 5, 7, 9. Кога ќе ги собере секои два од нив, ќе добие исти збирови како и кога би собирала по два од броевите 2, 4, 6, 10, па според тоа Бојан не може сигурно да победи во овој случај.]

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Секој проблем се бодува со 10 поени.