Language: **Greek**

Κυριακή, 23 Ιουνίου, 2013

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) θετικών ακεραίων τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{a^3b-1}{a+1}$ και $\frac{b^3a+1}{b-1}$ να είναι και οι δύο θετικοί ακέραιοι.

Πρόβλημα 2. Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο με $AB < AC$ και O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του ω. Έστω D σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα BC τέτοιο ώστε $\angle BAD = \angle CAO$. Έστω E το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου ω και της ευθείας AD. Αν M, N και P είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων BE, OD και AC, αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα σημεία M, N και P είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3. Να αποδείξετε ότι

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a και b τέτοιους ώστε $ab \geq 1$.

Πρόβλημα 4. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Δύο παίκτες, η Αλίκη και ο Βασίλης, παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

- Η Αλίκη επιλέγει n πραγματικούς αριθμούς , όχι κατ' ανάγκη διαφορετικούς
- Η Αλίκη στη συνέχεια γράφει τα αθροίσματα όλων των ζευγών των παραπάνω αριθμών πάνω σε μια κόλλα χαρτί την οποία δίνει στον Βασίλη . (υπάρχουν $\frac{n(n-1)}{2}$ τέτοια αθροίσματα, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά)
- Ο Βασίλης κερδίζει αν βρει σωστά τους n αριθμούς που αρχικά είχε επιλέξει η Αλίκη.

Μπορεί ο Βασίλης να είναι βέβαιος ότι θα κερδίσει στις ακόλουθες περιπτώσεις ;

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

[Για παράδειγμα, όταν $n = 4$, η Αλίκη μπορεί να επιλέξει τους αριθμούς 1, 5, 7, 9, που έχουν τα ίδια ανά δύο αθροίσματα με τους αριθμούς 2, 4, 6, 10, και έτσι ο Βασίλης δεν μπορεί να είναι βέβαιος ότι θα κερδίσει.]

Διάρκεια : 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες