Language: **French**

Dimanche 23 juin 2013

Problème 1. Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que les deux nombres $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ et $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ soient tous les deux des nombres entiers strictement positifs.

Problème 2. Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB < AC$. Soient O le centre de son cercle circonscrit ω et D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection de ω avec la droite (AD). Soient finalement M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE], [OD]$ et $[AC]$. Prouver que les points M, N et P sont alignés.

Problème 3. Prouver que

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

pour tous nombres réels strictement positfs a et b tels que $ab \geq 1$.

Problème 4. Soit n un entier strictement positif. Deux joueuses, Alexandra et Béatrice, jouent au jeu suivant :

- Alexandra choisit n nombres réels, pas forcéments différents ;
- Alexandra écrit sur une feuille de papier toutes les sommes possibles obtenues en faisant la somme de deux nombres différents parmi les n qu'elle a choisis (il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ telles sommes en tout, pas forcément différentes) et la donne à Béatrice ;
- Béatrice gagne si elle trouve correctement les n nombres initiaux choisis par Alexandra.

Est-ce que Béatrice est certaine de gagner dans chacun des cas suivants ?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$.

Justifiez vos réponses.

[Par exemple, pour $n = 4$, Alexandra peut choisir les nombres $1, 5, 7, 9$, et toutes les sommes possibles obtenues en faisant la somme de deux d'entre eux sont les mêmes que pour les nombres $2, 4, 6, 10$, de sorte que Béatrice n'est pas certaine de gagner.]

Temps accordé : 4 heures 30 minutes.
Chaque problème vaut 10 points.