Language: **Bulgarian**

---

*неделя, 23 юни 2013 г.*

**Задача 1.** Намерете всички наредени двойки цели положителни числа $(a,b)$, за които числата $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ са също цели положителни.

**Задача 2.** Даден е остроъгълен триъгълник *ABC*, за който $AB < AC$ и *O* е центърът на описаната му окръжност $\omega$. Нека *D* е точка върху отсечката *BC* така, че $\angle BAD = \angle CAO$ и *E* е втората пресечна точка на $\omega$ и правата *AD*. Ако *M*, *N* и *P* са средите съответно на отсечките *BE*, *OD* и *AC*, докажете, че точките *M*, *N* и *P* лежат на една права.

**Задача 3.** Докажете, че

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16,$$

където $a$ и $b$ са положителни реални числа така, че $ab \geq 1$.

**Задача 4.** Нека $n$ е естествено число. Двама играчи Алиса и Боби играят на следната игра:

- Алиса избира $n$ числа, не задължително различни.
- Алиса записва на лист хартия всички възможни суми по двойки и предава листа на Боби. (Броят на сумите е $\frac{n(n-1)}{2}$ и не е задължително сумите да са различни.)
- Боби печели играта, ако от първия опит намери вярно първоначалните $n$ числа, избрани от Алиса.

Може ли Боби да е сигурен, че е победител в следните случаи:

а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 8$?

Обосновете отговорите си!

(Например, в случая $n = 4$ Алиса може да избере числата 1, 5, 7 и 9, които имат същите суми по двойки както и числата 2, 4, 6 и 10, откъдето следва, че Боби не може да е сигурен, че е победител.)

*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*
*Всяка задача се оценява с 10 точки.*