

Language: Bosnian

Nedjelja, 23. juni 2013. godine

Zadatak 1. Naći sve uređene parove (a, b) pozitivnih cijelih brojeva, za koje su oba broja $\frac{a^3 b - 1}{a + 1}$ i $\frac{b^3 a + 1}{b - 1}$ pozitivni cijeli brojevi.

Zadatak 2. Neka je ABC oštrogli trougao kod kojeg je $AB < AC$ i neka je O centar njemu opisane kružnice ω . Neka je D tačka na duži BC takva da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$. Neka je E druga presječna tačka kružnice ω i prave AD . Ako su M, N i P redom središta duži BE, OD i AC , dokazati da su tačke M, N i P kolinearne.

Zadatak 3. Dokazati da je

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a + 1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b + 1}\right) \geq 16$$

za sve pozitivne realne brojeve a i b za koje vrijedi $ab \geq 1$.

Zadatak 4. Neka je n pozitivan cijeli broj. Dva igrača, Superman i Batman, igraju sljedeću igru:

- Superman bira n realnih brojeva, koji ne moraju svi biti različiti.
- Superman Batmanu predaje papir na kome je ispisao zbirove svakog od mogućih parova. (postoji $\frac{n(n-1)}{2}$ takvih zbirova, koji ne moraju biti različiti)
- Batman pobjeđuje ako tačno, u prvom pokušaju, pronađe svih početnih n brojeva koje je Superman izabrao.

Može li Batman uvijek biti siguran da će pobijediti u sljedećim slučajevima?

- a.** $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Objasni svoj(e) odgovor(e).

[Na primjer, za $n = 4$, Superman može izabrati brojeve 1, 5, 7, 9, čije su sume po parovima iste kao i kod brojeva 2, 4, 6, 10 i tu Batman ne može biti siguran u pobjedu.]

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 10 poena