Language: **Azerbaijan**

Sunday, June 23, 2013

Məsələ 1. Elə müsbət tam (a, b) ədədərini tapın ki, $\frac{a^3b-1}{a+1}$ və $\frac{b^3a+1}{b-1}$ ədədləri müsbət tam ədəd olsun.

Məsələ 2. İtibucaqlı *ABC* üçbucağında $AB < AC$ dir və onun xaricinə mərkəzi *O* olan ω çevrəsi çəkilmişdir. *BC* düz xəttinin üzərində $\angle BAD = \angle CAO$ olacaq şəkildə *D* nöqtəsi götürülür. ω çevrəsi ilə *AD* düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi *E* olsun. *M*, *N* və *P* sırası ilə *BE*, *OD* və *AC* düz xətlərinin orta nöqtələridir. *M*, *N* və *P* nöqtələrinin kolinear olduğunu isbat edin.

Məsələ 3. Müsbət *a*, *b* həqiqi ədədləri üçün $ab \geq 1$ isə

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

olduğunu göstərin.

Məsələ 4. *n* müsbət tam ədəddir. Alice ilə Bob aralarında belə bir oyun oynayırlar:

- Alice *n* sayda həqiqi ədəd seçir (ədədlərin fərqli olma zərurəti yoxdur)
- Alice bu ədədləri cütləyir və hər bir cütün cəmini tapır və çıxabiləcək bütün nəticələri Boba verir. (belə cəmlərin sayı $\frac{n(n-1)}{2}$ olacaq, cavabların arasında eyni olanlar ola bilər)
- Əgər Bob Alicenin əvvəlcədən seçdiyi *n* ədədi düzgün olaraq taparsa oyunun qalibi olur.

Sual: Bob aşağıdakı halların hansılarında oyunun qalibi olacağından əmin olabilər?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Cavabları əsaslandırın.

[Məsələn $n = 4$ halında Alice həm 1, 5, 7, 9, həm də 2, 4, 6, 10 ədədlərini seçərsə, hər iki halda ədədləri cütləyib cəmlədikdə eyni nəticə əldə olunur. Deməli $n = 4$ olduqda Bob hansı ədədlərin seçildiyini əminliklə söyləyə bilməz.]

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 10 points