

Language: Arabic

الأحد ٢٣ يونيو ٢٠١٣ م

- ١- أوجد جميع الأزواج المرتبة (a,b) من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تجعل كلا من $\frac{a^3b-1}{a+1}$ و $\frac{b^3a+1}{b-1}$ عدداً صحيحاً موجباً.
- ٢- ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا فيه $|AB| < |AC|$ ، و ω هي الدائرة الخارجية المارة برؤوس المثلث ومركزها O . النقطة D تقع على الضلع BC بحيث $\angle BAD = \angle CAO$. ولتكن E هي نقطة التقاطع الثانية للدائرة ω مع المستقيم AD . إذا كانت النقاط M, N, P هي منتصفات القطع المستقيمة BE, OD, AC على الترتيب، فبرهن أن M, N, P تقع على استقامة واحدة.
- ٣- أثبت أن

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

لكل عددين حقيقيين موجبين a, b يحققان $ab \geq 1$.

- ٤- الطالبان A, B يلعبان لعبة على النحو التالي: الطالب A يكتب n من الأعداد الحقيقية (ليست بالضرورة مختلفة) على ورقة ويخفيها عن زميله B . ثم يجمع كل عددين منها ويكتب جميع النواتج (عددها $\frac{n(n-1)}{2}$)، وليست بالضرورة مختلفة) على ورقة أخرى يعطيها زميله B . يعتبر B فائزاً إذا استطاع أن يكتشف جميع الأعداد التي أخفاها A ، وإلا فإن A يعتبر هو الفائز. وضَّح مع التعليل أي الطالبين يملك خطة للفوز الأكيد في كلِّ من الحالات التالية:

أ) $n = 5$ ب) $n = 6$ ج) $n = 8$.

على سبيل المثال، في حالة $n = 4$ ، لا يملك B خطة للفوز الأكيد، لأن A يمكنه اختيار مجموعة الأعداد $1, 5, 7, 9$ أو مجموعة الأعداد $2, 4, 6, 10$ حيث كل منهما تعطي نفس نواتج الجمع التي يراها B .

عشر درجات لكل سؤال
الوقت المتاح: أربع ساعات ونصف